ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.
A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL
SZERKESZTI
SZABÓ JÓZSEF
OSZTÁLYTITKÁR.

VIII. KÖTET. XII. SZÁM. 1881.

EGY NEGYEDRENDŰ FELÜLETRŐL.

HUNYADY JENŐ
LEV. TAGTÓL.

(Előadtaa III. osztály ülésén 1881. október 17-én.)

Ára 20 kr.

BUDAPEST, 1881.
A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.
(Az akadémia épületében.)

Eddig külön megjelent
ÉRTEKEZÉSEK
a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet.

Második kötet.

Harmadik kötet.

EGY
NEGYEDRENDŰ
FELÜLETRŐL.

HUNYADY JENŐ

LEV. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén 1881. október 17-én.)

BUDAPEST, 1881.

A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

Az Akadémia épületében.

Budapest, 1881. Az Athenaeum r. t. könyvnyomdája.

Egy negyedrendű felületről.

A hat ponton átmenő másodfokú kúpok csúcsainak mértani helye egy negyedrendü felület, mely felületnek a literaturájára nézve, a mennyire az előttem ismeretes, a következőket emlitem fel:

Chasles (1837) »Aperçu historique sat.« czimű munkájának XXXIII. note-jában (403. l.) a következő tételt mondta ki:

»A hat ponton átmenő másodfokú kúpok csúcsainak mértani helye, azon harmadrendű térgörbe, melyet a kérdésbenforgó hat pont határoz meg.«

Chaslesnak ezen hamis tételét Weddle (1850) igazította helyre »On the theorems in space analogous to those of Pascal and Brianchon in a plane« czimű értekezésének végén előforduló jegyzetben, (Cambr. and Doubl. Math. Journ. V. köt. 69. l.) kifejezést adva annak, hogy a kérdésbenforgó kúpcsúcsok mértani helye egy negyedrendű felület, melyen a hat pontból meghatározott negyedrendű térgörbe fekszik.

Később Chasles a következő czímű értekezésében: »Sur la surface et sur la courbe à double courbure, lieu des sommets des Cônes du second ordre, qui divisent harmoniquement six ou sept segments rectilignes, pris sur antant de droites de l'espace« (Compte rendu, Séance du 10. Juin 1861. 1159 l. V. tétel) ismét visszatért a hat ponton átmenő másodfokú kúpok csúcsainak mértani helyére. Pusztán elnézésből csúszhatott be itt is azon hibás állitás, hogy a kérdésben forgó negyedrendű felületen harmincz egyenes fekszik, u. m. a hat pontot összekötő tizenöt egyenes és a hat ponton átmenő tizenöt síkpárnak a metszésvonalai, a mi annyiban téves, a mennyiben a hat ponton csak tiz sikpár megy át és igy e sikpárak metszésvonala is csak tiz.

A Comptes rendus ugyanezen füzetében (1216. l.) Cayley Weddle tételét analitikailag bizonyitja be.

Végre még megemlitendő, hogy Hierholzer »Über Kegelschnitte im Raume« czimű értekezésében (Clebsch u. Neumann Mathem. Annalen II. köt. 582. l.) e negyedrendű felület egyenletét levezette és a Cayley-féle egyenlettől lényegesen különböző alakban adja. *)

Ha a kérdéses negyedrendű felület egyenletét keressük, akkor az, analitikailag felfogva, ugyanazon feladatra vezet, mintha a csúcsából és öt pontjából meghatározott másodfokú kúpfelület egyenletét keresnők.

Ezen utóbbi felfogásból indultam ki és a kúpfelület egyenletét a (4) alatti egyenleten kívül még más tizenöt alakban (lásd a (8) és (9) alatti egyenleteket) nyertem, innét azután áttértem a negyedrendű felület tulajdonságainak vizsgálatára (lásd a 2. §-t.)

Ez értekezés végét egy toldalék egy már előbb publikált értekezéshez képezi, mely utóbbi értekezés az Akadémiai értekezések a math. tudományok köréből IV. kötetében jelent meg.

*) Lásd szintén Hierholzer következő czímű értekezését: »Über eine Fläche der vierten Ordnung« az id. publikáczió IV. kötetének 172—180. lapjain.

1. Mielőtt a kitüzött feledatok megoldására áttérnénk szükségesnek tartjuk az értekezésben használt jelölések magyarázatát adni.

Az i pontnak homogén viszonykoordinátáit

$$x_i,\ y_i,\ z_i,\ p_i,\ \text{—}\ \ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

vel, az i, k, l pontokból meghatározott sík homogén koordinátáit pedig a következőképen jelöljük.

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} y_i & z_i & p_i \\ y_k & z_k & p_k \\ y_l & z_l & p_l \end{vmatrix} = \xi_{ikl}, \text{—} \quad \begin{vmatrix} z_i & p_i & x_i \\ z_k & p_k & x_k \\ z_l & p_l & x_l \end{vmatrix} = \eta_{ikl}, \\
&\begin{vmatrix} p_i & x_i & y_i \\ p_k & x_k & y_k \\ p_l & x_l & y_l \end{vmatrix} = \zeta_{ikl}, \text{—} \quad \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} = \pi_{ikl},
\end{aligned}\right\} \ldots \text{(b)}$$

Továbbá még a következő jelöléseket használjuk:

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i & p_i \\ x_k & y_k & z_k & p_k \\ x_l & y_l & z_l & p_l \\ x & y & z & p \end{vmatrix} = (i\,k\,l\,0) \\
&\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i & p_i \\ x_k & y_k & z_k & p_k \\ x_l & y_l & z_l & p_l \\ x_m & y_m & z_m & p_m \end{vmatrix} = (i\,k\,l\,m).
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

1. §. Az öt pontjából és csúcsából meghatározott kúp egyenlete.

2. A másodfokú kúpfelület nyolcz pontból van meghatározva; de miután a kúpfelület csúcsa három pontnak számitandó, azért a másodfokú kúpfelület öt pontjából és a csúcsából meg van határozva; az ily módon meghatározott kúp egyenlete egyszersmind azon feltételt fejezi ki, mely a kúpnak hat pontja és a csúcsa között fennáll.

Legyen a másodfokú felület egyenlete a következő:

$$\begin{aligned} a_{11}X^2+a_{22}Y^2+a_{33}Z^2+a_{44}P^2+2a_{12}XY+2a_{13}XZ+2a_{14}XP+ \\ +2a_{23}YZ+2a_{24}YP+2a_{34}ZP=0 \end{aligned} \quad (1)$$

akkor annak feltételei, hogy e másodfokú felület az 1, 2, 3, 4 5, 6 pontokon átmegy, a következők lesznek:

$$\left.\begin{aligned} & a_{11}x_1^2+a_{22}y_1^2+a_{33}z_1^2+a_{44}p_1^2+2a_{12}x_1y_1+2a_{13}x_1z_1+ \\ & \quad +2a_{14}x_1p_1+2a_{23}y_1z_1+2a_{24}y_1p_1+2a_{34}z_1p_1=0 \\ & a_{11}x_2^2+a_{22}y_2^2+a_{33}z_2^2+a_{44}p_2^2+2a_{12}x_2y_2+2a_{13}x_2z_2+ \\ & \quad +2a_{14}x^2p_2+2a_{23}y_2z_2+2a_{24}y_2p_2+2a_{34}z_2p_2=0 \\ & a_{11}x_3^2+a_{22}y_3^2+a_{33}z_3^2+a_{44}p_3^2+2a_{12}x_3y_3+2a_{13}x_3z_3+ \\ & \quad +2a_{14}x_3p_3+2a_{23}y_3z_3+2a_{24}y_3p_3+2a_{34}z_3p_3=0 \\ & a_{11}x_4^2+a_{22}y_4^2+a_{33}z_4^2+a_{44}p_4^2+2a_{12}x_4y_4+2a_{13}x_4z_4+ \\ & \quad +2a_{14}x_4p_4+2a_{23}y_4z_4+2a_{24}y_4p_4+2a_{34}z_4p_4=0 \\ & a_{11}x_5^2+a_{22}y_5^2+a_{33}z_5^2+a_{44}p_5^2+2a_{12}x_5y_5+2a_{13}x_7z_5+ \\ & \quad +2a_{14}x^5p_5+2a_{23}y_5z_5+2a_{24}y_5p_5+2a_{34}z_5p_5=0 \\ & a_{11}x_6^2+a_{22}y_6^2+a_{33}z_6^2+a_{44}p_6^2+2a_{12}x_6y_6+2a_{13}x_5z_6+ \\ & \quad +2a_{14}x_6p_5+2a_{23}y_6z_6+2a_{24}y_6p_6+2a_{34}z_6x_6=0 \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

azon feltételek pedig, melyek kifejezik, hogy az x, y, z, p pont az (1) alatti kúpfelület csúcsa, a következők lesznek:

$$\left.\begin{aligned} 2a_{11}x+2a_{12}y+2a_{13}z+2a_{14}p=0 \\ 2a_{12}x+2a_{22}y+2a_{23}z+2a_{24}p=0 \\ 2a_{13}x+2a_{23}y+2n_{33}z+2a_{34}p=0 \\ 2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+2a_{44}p=0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (3)$$

Ha a (2) és (3) alatti egyenletekből a bennük vonalosan és homogénen előforduló $a_{11}, \ldots a_{44}, 2a_{12} \ldots 2a_{34}$ állandókat kiküszöböljük, akkor a kiküszöbölési-eredő fejezi ki a keresett föltételt. A kiküszöbölési eredő pedig a következő jelölés használata mellett:

$$\left|\begin{array}{cccccccccc}
x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & p_1^2 & x_1y_1 & x_1z_1 & x_1p_1 & y_1z_1 & y_1p_1 & z_1p_1 \\
x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & p_2^2 & x_2y_2 & x_2z_2 & x_2p_3 & y_2z_2 & y_2p_2 & z_2p_2 \\
x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & p_3^2 & x_3y_3 & x_3z_3 & x_3p_3 & y_3z_3 & y_3p_3 & z_3p_3 \\
x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & p_4^2 & x_4y_4 & x_4z_4 & x_4p_4 & y_4z_4 & y_4p_4 & z_4p_4 \\
x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & p_5^2 & x_5y_5 & x_5z_5 & x_5p_5 & y_5z_5 & y_5p_5 & z_5p_5 \\
x_6^2 & y_6^1 & e_6^2 & p_6^2 & x_6y_6 & x_6z_6 & x_6p_6 & y_6z_6 & y_6p_6 & z_6p_6 \\
2x & 0 & 0 & 0 & y & z & p & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2y & 0 & 0 & x & 0 & 0 & z & p & 0 \\
0 & 0 & 2z & 0 & 0 & x & 0 & y & 0 & p \\
0 & 0 & 0 & 2p & 0 & 0 & x & 0 & y & z
\end{array}\right| = \Delta \ldots \text{(d)}$$

ez lesz

$$\Delta = 0 \ldots\ldots (4)$$

3. A (4) alatti egyenletnek a benne előforduló determináns átalakitása által sokkal egyszerűbb alakot adhatunk. Ezen átalakítás végett a következőben bizonyos azonos egyenleteket kell levezetnünk.

Áll először is a következő azonos egyenlet:

$$\left|\begin{array}{cccccc}
x_2x_3 & y_2y_3 & z_2z_3 & x_2y_3+x_3y_2 & x_2z_3+x_3z_2 & y_2z_3+y_3z_2 \\
x_3x_4 & y_3y_4 & z_3z_4 & x_3y_4+x_4y_3 & x_3z_4+x_4z_3 & y_3z_4+y_4z_3 \\
x_1x_4 & y_1y_4 & z_1z_4 & x_1y_4+x_4y_1 & x_1z_4+x_4z_1 & y_4z_1+y_4z_1 \\
x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 & x_1y_2+x_2y_1 & x_1z_2+x_2z_1 & y_1z_2+y_2z_1 \\
x_1x_3 & y_1y_3 & z_1z_3 & x_1y_3+x_3y_3 & x_1z_3+x_3z_1 & y_1z_3+y_3z_1 \\
x_2x_4 & y_2y_4 & z_2z_4 & x_2y_4+x_4y_2 & x_2z_4+x_4x_2 & y_2z_4+y_4z_2
\end{array}\right| =$$

$$= (234)\,(341)\,(412)\,(123)^{*)} \ldots\ldots (5)$$

és ha az ezen egyenletben előforduló:

$$x_1,\ y_1,\ z_1$$
$$x_2,\ y_2,\ z_2$$
$$x_3,\ y_3,\ z_3$$
$$x_4,\ y_4,\ z_4$$

---

*) Lásd a műegyetemi lapok II. kötetének 256. és 310.

mennyiségeket a következőkkel pótoljuk:

$$\xi_{230},\ \eta_{230},\ \zeta_{230}$$
$$\xi_{340},\ \eta_{340},\ \zeta_{340}$$
$$\xi_{450},\ \eta_{450},\ \zeta_{450}$$
$$\xi_{520},\ \eta_{520},\ \zeta_{520}$$

akkor a jobboldalon álló sokszorozmánynak egyes tényezőit még a következőképen redukálhatjuk:

A (234) determináns a nevezett helyettesitéseknél fogva a következőbe megy át:

$$\begin{vmatrix} \xi_{340} & \eta_{340} & \zeta_{340} \\ \xi_{450} & \eta_{450} & \zeta_{450} \\ \xi_{520} & \eta_{520} & \zeta_{520} \end{vmatrix}$$

ezt pedig még igy is irhatjuk;

$$\begin{vmatrix} \xi_{340} & \eta_{340} & \zeta_{340} & \pi_{340} \\ \xi_{450} & \eta_{450} & \zeta_{450} & \pi_{450} \\ \xi_{520} & \eta_{520} & \zeta_{520} & \pi_{520} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

és ha ezt a következővel sokszorozzuk:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & p \\ x_3 & y_3 & z_3 & p_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & p_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 & p_5 \end{vmatrix}$$

találjuk, hogy a sokszorozás eredménye ez:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & (3450) \\ 0 & (3450) & 0 & 0 \\ 0 & (2350) & (2450) & 0 \\ p & p_3 & p_4 & p_5 \end{vmatrix} = -p(3450)^2(2450)$$

vagy az egyenlő tényezők elhagyása után (234) a fentebb emlitett helyettesitéseknél fogva a következő értéket veszi fel:

$$p\,(2450)\,(3450),$$

ehhez pedig egészen hasonló úton találjuk, hogy az előbb emlitett sokszorozmány (341), (412), (123) tényezői a nevezett helyettesitéseknel fogva a következő értékeket veszik fel:

$$p\,(2350)\,(2450)$$
$$p\,(2340)\,(2350)$$
$$p\,(2340)\,(3450).$$

Az (5) alatti egyenlet tehát az előbb említett helyettesitéseknél fogva a következő azonos egyenletre vezet:

$$\left|\begin{array}{cccccc}
\xi_{340}\,\xi_{450} & \eta_{340}\,\eta_{450} & \zeta_{340}\,\zeta_{450} & \xi_{340}\,\eta_{450}+\xi_{450}\,\eta_{340} & \xi_{340}\,\zeta_{450}+\xi_{450}\,\zeta_{340} & \eta_{340}\,\zeta_{450}+\eta_{450}\,\zeta_{340} \\
\xi_{450}\,\xi_{520} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{520}\,\xi_{230} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{230}\,\xi_{340} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{230}\,\xi_{450} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{340}\,\xi_{520} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right| =$$

$$= p^4\,(2340)^2\,(2350)^2\,(2450)^2\,(3450^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

4. Ezeket előrebocsátva, sokszorozzuk a (d) alatti determinánst a következővel:

$$\left|\begin{array}{cccccccccc}
\xi_{340}\,\xi_{450} & \eta_{340}\eta_{40} & \zeta_{340}\zeta_{450} & \pi_{340}\pi_{450} & \xi_{330}\eta_{450}+\xi_{450}\eta_{340} & \xi_{340}\zeta_{450}+\xi_{450}\zeta_{340} & \xi_{340}\pi_{450}+\xi_{460}\pi_{340} & \eta_{340}\zeta_{450}+\eta_{450}\zeta_{340} & \eta_{440}\pi_{450}+\eta_{450}\pi_{140} & \zeta_{340}\eta_{450}+\varsigma_{450}\eta_{340} \\
\xi_{450}\,\xi_{520} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{520}\,\xi_{260} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{280}\,\xi_{340} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{230}\,\xi_{450} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{340}\,\xi_{520} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right|, \quad (e)$$

mely a (b) alatti determináns negativ értéke és igy az

$$= -\,p^4\,(2340)^2\,(2350)^2\,(2450)^2\,(3450)^2.$$

A sokszorozás eredménye a következő:

$$\begin{vmatrix}
(1340)(1450) & (1450)(1520) & (1520)(1230) & (1230)(1340) & (1230)(1450) & (1340)(1520) & x_1 p_1 & y_1 p_1 & z_1 p_1 & p_1^2 \\
(2340)(2450) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 p_2 & y_2 p_2 & z_2 p_2 & p_2^2 \\
0 & (3450)(3520) & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 p_3 & y_3 p_3 & z_3 p_3 & p_3^2 \\
0 & 0 & (4520)(4230) & 0 & 0 & 0 & y_4 p_4 & y_4 p_4 & z_4 p_4 & p_4^2 \\
0 & 0 & 0 & (5230)(5340) & 0 & 0 & x_5 p_5 & y_5 p_5 & z_5 p_5 & p_5^2 \\
(6340)(6450) & (6450)(6520) & (6520)(6230) & (6230)(6340) & (6230)(6450) & (6340)(6520) & x_6 p_6 & y_6 p_6 & z_6 p_6 & p_6^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2p
\end{vmatrix} =$$

$$= 2p^4 (2340)^2 (2350)^2 (2450)^2 (3450)^2 . \begin{vmatrix} (2360) & (4560) & (3460) & (2560) \\ (1230) & (1450) & (1340) & (1250) \end{vmatrix} =$$

$$= 2p_4 (2340)^2 (2350)^2 (2450)^2 (3450)^2 . \{ (1230)(2560)(1450)(3460) - (4560)(1340)(2360)(1250) \}$$

és innét, ha még tekintetbe veszszük, hogy az (e) alatti determináns

$$= - p^4 (2340)^2 (2350)^2 (2450)^2 (3450)^2$$

az egyenlő tényezők elhagyása után találjuk, hogy

$$\Delta = 2 \{ (1230)(2560)(1450)(3460) - (4560)(1340)(2360)(1250) \} \quad . \; . \; . \; . \quad (7)$$

és ezért a (4) alatti feltételt még a következő alakban írhatjuk:

$$(1230)(2560)(1450)(3460) - (4560)(1340)(2360)(1250) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

mely egyenlet azon feltételt fejezi ki, mely a kúpnak 1. 2, 3. 4, 5, 6 pontja és 0 csúcsa között fennáll.

Megjegyzendő, hogy e feltételi egyenletet még tizennégy, az előbbihez hasonló alakban fejezhetjük ki. Ezek összesen a következők lesznek:

$$\left.\begin{array}{l}
(1350)\,(1460)\,(2360)\,(2450) - (1360)\,(1450)\,(2350)\,(2460) = 0. \\
(1230)\,(1560)\,(2460)\,(3450) - (1260)\,(1350)\,(2340)\,(4560) = 0. \\
(1240)\,(1350)\,(2560)\,(3460) - (1250)\,(1340)\,(2460)\,(3560) = 0. \\
(1230)\,(1560)\,(2450)\,(3460) - (1250)\,(1360)\,(2340)\,(4560) = 0. \\
(1240)\,(1360)\,(2560)\,(3450) - (1260)\,(1340)\,(2450)\,(3560) = 0. \\
(1240)\,(1560)\,(2360)\,(3450) - (1260)\,(1450)\,(2340)\,(3560) = 0. \\
(1230)\,(1450)\,(2560)\,(3460) - (1250)\,(1340)\,(2360)\,(4560) = 0. \\
(1240)\,(1560)\,(2350)\,(3460) - (1250)\,(1460)\,(2340)\,(3560) = 0. \\
(1230)\,(1460)\,(2560)\,(3450) - (1260)\,(1340)\,(2350)\,(4560) = 0. \\
(1250)\,(1460)\,(2360)\,(3450) - (1260)\,(1450)\,(2350)\,(3460) = 0. \\
(1230)\,(1460)\,(2450)\,(3560) - (1240)\,(1360)\,(2350)\,(4560) = 0. \\
(1340)\,(1560)\,(2360)\,(2450) - (1360)\,(1450)\,(2340)\,(2560) = 0. \\
(1340)\,(1560)\,(2350)\,(2460) - (1350)\,(1460)\,(2340)\,(2560) = 0. \\
(1250)\,(1360)\,(2460)\,(3450) - (1260)\,(1350)\,(2450)\,(3460) = 0. \\
(1230)\,(1450)\,(2460)\,(3560) - (1240)\,(1350)\,(2360)\,(4560) = 0.
\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

5. A (8) alatti egyenlet, mely a másodfokú kúp 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontja és 0 csúcsa közötti összefüggést kifejezi, az 1,... 6 pontok koordinátáiban másodfokú, de a 0 csúcs koordinátáiban negyedfokú. A nevezett egyenlet fejezi ki szintén az öt pontból és csúcsából adott másodfokú kúp egyenletét is, ha a hatodik pont koordinátáit kurrens koordinátáknak tekintjük. De miután szokásos a kurrens koordinátákat x, y, z, p-vel jelölni,

mely szokástól itt sem akarunk eltérni, a kérdéses kúp egyenletét a (8) alatti egyenletből majd úgy nyerjük, hogy abban a 0 pontot az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontok egyikével fölcseréljük, mi által azon kúpnak az egyenletét nyerjük, melynek csúcsa az utóbbi pontban van és mely a hátralévő öt ponton megy át. Igy tehát, ha a (8) alatti egyenletben a 0 pontot rendszerint felcseréljük az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontokkal, akkor hat kúpot nyerünk, melyeknek csúcsai az előbbi pontokban vannak és melyek rendszerint még a 2, 3, 4, 5, 6 ; 1, 3, 4, 6, 6 ; 1, 2, 4, 5, 6 ; 1, 2, 3, 5, 6 ; 1, 2, 3, 4, 6 és 1, 2, 3, 4, 5 pontokon mennek át, ezen kúpok egyenletei a következők:

$$(1256)\,(1346)\,(1230)\,(1450) - (1236)\,(1456)\,(1250)\,(1340) = 0.$$

$$(1245)\,(2346)\,(1230)\,(2560) - (1234)\,(2456)\,(1250)\,(2360) = 0.$$

$$(1345)\,(2356)\,(1230)\,(3460) - (1235)\,(3456)\,(1340)\,(2360) = 0.$$

$$(1234)\,(2456)\,(1450)\,(3460) - (1245)\,(2346)\,(1340)\,(4560) = 0.$$

$$(1235)\,(3456)\,(1450)\,(2560) - (1345)\,(2356)\,(1250)\,(4560) = 0.$$

$$(1236)\,(1456)\,(2560)\,(3460) - (1256)\,(1346)\,(2360)\,(4560) = 0.$$

E hat kúpot kettenként kombinálva, összesen tizenöt kúp-párt nyerünk, mely kúp-párok egy-egy közös alkotóján kivül egymást még az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontokból meghatározott harmadrendü térbeli görbében metszik.

2. §. A hat ponton átmenö kúpok csúcsainak mértani helye.

6. Ha a (8) alatti egyenletben a 0 csúcs koordinátáit tekintjük kurrens koordinátáknak, akkor ez fejezi ki az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontokon átmenő kúpok csúcsai mértani helyének az egyenletét, a mely miután az a 0 pont koordinátáiban negyedfokú egy negyedrendű felületnek az egyenlete.

A kérdésben forgó negyedrendű felület kiváló tulajdonságai a következők:

1-ször: A kérdéses negyedrendű felület átmegy a hat adott ponton, mit legegyszerűbben konstatálhatunk e felület egyenletének (4) alatti alakján, miután a (d) alatti determináns a következő helyettesítések mellett:

$$x = x_i,\ y = y_i,\ z = z_i,\ p = p_i\ (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

azonosan eltűnik, a mit úgy látunk be, ha a 2-vel sokszorozott i-dik sorból az x_i, y_i, z_i és p_i-vel sokszorozott a 7-dik, 8-dik, 9-dik és 10-dik sort kivonjuk.

2-szor: Az adott hat pont egyszersmind a felület kettős pontjai, azaz ha a (8) alatti egyenlet első tagját U-val jelöljük, akkor

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_i = 0\ \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_i = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_i = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_i = 0,$$

$$(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

minek igazolására először is U-nak első parcziális differencziális hányadosait képezzük, melyek a következők:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &= \xi_{123}\,(2560)\,(1450)\,(3460) - \xi_{456}\,(1340)\,(2360)\,(1250) \\
&+ \xi_{254}\,(1230)\,(1450)\,(3460) - \xi_{134}\,(4560)\,(2360)\,(1250) \\
&+ \xi_{145}\,(1230)\,(2560)\,(3460) - \xi_{236}\,(4566)\,(1340)\,(1250) \\
&+ \xi_{346}\,(1230)\,(2560)\,(1450) - \xi_{125}\,(4560)\,(1340)\,(2360) \\
\frac{\partial U}{\partial y} &= \eta_{123}(2560)\,(1450)\,(3460) - \eta_{456}\,(1340)\,(2360)\,(1250) \\
&+ \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

sat. sat.

de ezek a következő egyidejü helyettesítések mellett:

$$\begin{aligned}
&(1230) = 0,\ (1340) = 0,\ (1450) = 0,\ (1250) = 0. \\
&(1230) = 0,\ (2560) = 0,\ (2360) = 0,\ (1250) = 0. \\
&(1230) = 0,\ (1340) = 0,\ (2360) = 0,\ (3460) = 0. \\
&(4560) = 0,\ (1340) = 0,\ (1450) = 0,\ (3460) = 0. \\
&(4560) = 0,\ (2560) = 0,\ (1450) = 0,\ (1250) = 0. \\
&(4560) = 0,\ (2560) = 0,\ (2360) = 0,\ (3460) = 0.
\end{aligned}$$

eltűnnek, a mi, tekintetbe véve, hogy ezen sikrendszerek jellemzik az 1, 2, ... 6 pontokat, állításunkat bebizonyitja.

3-szor. Az 1, ... 6 pontokat összekötő egyenesek a (8) alatti negyedrendű felületen feküsznek.

A (8) alatti egyenletnek elég tétetik a következő helyettesitések által:

$$
\begin{aligned}
(1230) &= 0, & (1340) &= 0;\\
(1230) &= 0, & (2360) &= 0;\\
(1230) &= 0, & (1250) &= 0;\\
(2560) &= 0, & (4560) &= 0;\\
(2560) &= 0, & (2360) &= 0;\\
(2560) &= 0, & (1250) &= 0;\\
(1450) &= 0, & (4560) &= 0;\\
(1450) &= 0; & (1340) &= 0;\\
(1450) &= 0, & (1250) &= 0;\\
(3460) &= 0, & (4560) &= 0;\\
(3460) &= 0, & (1340) &= 0;\\
(3460) &= 0. & (2360) &= 0;
\end{aligned}
$$

de ezen síkpárak fejezik ki az: 13, 23, 12, 56, 26, 25, 45, 14, 15, 46, 34, 36 egyeneseket.

A (9) alatti egyenlet-rendszer első egyenletének, mely a (8) alattival azonos és attól csak alakilag különbözik, pedig a következő helyettesitések által elégtétetik:

$$
\begin{aligned}
(1460) &= 0, & (1360) &= 0;\\
(2450) &= 0, & (2460) &= 0;\\
(1350) &= 0, & (2350) &= 0;
\end{aligned}
$$

mely síkpárok az 16, 24 és 35 egyeneseket fejezik ki:

4-szer. Az 1, 2, ... 6 pontok tiz síkpárt határoznak meg úgy, hogy mindegyik síkpár átmegy mind a hat ponton. Ezen síkpárak metszésvonalai szintén a (8) alatti negyedrendű felületen feküsznek, úgy hogy összesen véve a (8) alatti negyedrendű felületen huszonöt egyenes fekszik.

Mert a (8) alatti egyenletnek elég tétetik a következő helyettesitések által:

$$
\begin{aligned}
(1230) &= 0, & (4560) &= 0;\\
(2560) &= 0, & (1340) &= 0;\\
(1450) &= 0, & (2360) &= 0;\\
(3460) &= 0, & (1250) &= 0;
\end{aligned}
$$

de ezen egyenletek az

123	és	456
256	»	134
145	»	236
346	»	125

síkok metszésvonalait fejezik ki. Úgy szintén látjuk a (9) alatti egyenletrendszer 1-ső, 2-dik és 3-dik egyenletéből, hogy az

$$\left.\begin{array}{l}(1350)=0,\ (2460)=0;\\ (1460)=0,\ (2350)=0;\\ (2450)=0,\ (1360)=0;\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}(1560)=0,\ (2340)=0;\\ (1260)=0,\ (3450)=0;\end{array}\right\}$$

$$(1240)=0,\ (3560)=0;$$

síkpárak metszésvonalai szintén a kérdéses negyedrendű felületen feküsznek.

5-ször. A (8) alatti negyedrendű felületen végre még az 1, ... 6 pontokból meghatározott harmadrendü térgörbe is fekszik.

Mely utóbbi állitásunk bebizonyítására küszöböljük ki, a (10) alatti egyenletrendszer első és utolsó egyenletéből, a következő mennyiségeket:

$$(1256)(1346),\ (1236)(1456);$$

a kiküszöbölési eredő a (8) alatti egyenletre vezet, a mi azt mutatja, hogy a nevezett egyenletek által kifejezett kúpok metszés vonala, azaz az 1, . . . 6 pontokból meghatározott harmadrendű térgörbe a (8) alatti felületen fekszik.

Toldalék a IV. kötet 6. számú értekezéséhez.

A czimben felemlített értekezés megjelenése óta, mely még németűl a Bochardt-féle Journal 83-dik kötetében is megjelent, annak tárgyával több mathematikus is foglalkozott, de mindamellett nem tartom feleslegesnek az említett értekezés végén jellemzett problémák közül különösen azzal foglalkozni, mely a következő egyenletből

$$\begin{vmatrix} x_2^1 & y_1^2 & z_1^2 & y_1z_1 & x_1z_1 & x_1y_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2z_2 & x_2z_2 & x_2y_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & y_3z_3 & x_3z_3 & x_3y_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & y_4z_4 & x_4z_4 & x_4y_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & y_5z_5 & x_5z_5 & x_5y_4 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & y_6z_6 & x_6z_8 & x_6y_6 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

az értekezés (1)—(15) alatti egyenleteknek levezetését tűzi ki feladatúl.

E toldalék tárgyát az utóbb nevezett levezetések képezik.

1. Az i. ért. használt jelölések megtartásával még rövidség kedvéért a következő determinánst:

$$\left|\begin{array}{cccccc}
\xi_{kl}\,\xi_{lm} & \eta_{kl}\,\eta_{lm} & \zeta_{kl}\,\zeta_{lm} & \eta_{kl}\,\zeta_{lm}+\eta_{lm}\,\zeta_{kl} & \zeta_{kl}\,\xi_{lm}+\zeta_{lm}\,\xi_{kl} & \xi_{kl}\,\eta_{lm}+\xi_{lm}\,\eta_{kl} \\
\xi_{lm}\,\xi_{mi} & . & . & \eta_{lm}\,\zeta_{mi}+\eta_{mi}\,\zeta_{lm} & . & . \\
\xi_{mi}\,\xi_{ik} & . & . & \eta_{mi}\,\zeta_{ik}+\eta_{ik}\,\zeta_{mi} & . & . \\
\xi_{ik}\,\xi_{kl} & . & . & \eta_{ik}\,\zeta_{kl}+\eta_{kl}\,\zeta_{ik} & . & . \\
\xi_{ik}\,\xi_{lm} & . & . & \eta_{ik}\,\zeta_{lm}+\eta_{lm}\,\zeta_{ik} & . & . \\
\xi_{kl}\,\xi_{mi} & . & . & \eta_{kl}\,\zeta_{mi}+\eta_{mi}\,\zeta_{kl} & . & .
\end{array}\right|$$

így jelöljük:

$$\left|\begin{array}{c}
kl,\ lm \\
lm,\ mi \\
mi,\ ik \\
ik,\ kl \\
ik,\ lm \\
kl,\ mi
\end{array}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Miután továbbá a kérdéses levezetéseknél szükségesnek mutatkozik az (1) alatti egyenletben előforduló determinánst a (2) alattihoz hasonló alakú determinánsokkal sokszorozni, azért az (1) alatti determináns h-dik sorának sokszorozatát a (2) alatti determináns tetszőleges sorával, a mint azt általában igy irjuk:

$$\xi_{pq}\,\xi_{rs},\ \eta_{pq}\,\eta_{rs}\ \zeta_{pq}\,\zeta_{rs}\ \eta_{pq}\,\zeta_{rs}+\eta_{rs}\,\zeta_{pq}\ \zeta_{pq}\,\xi_{rs}+\zeta_{rs}\,\xi_{pq}\ \xi_{pq}\,\eta_{rs}+\xi_{rs}\,\eta_{pq},$$

itt előállítjuk; a kérdéses sokszorozmány a következő:

$$x_p^2\,\xi_{pq}\,\xi_{rs}+y_h^2\,\eta_{pq}\,\eta_{rs}+z^2\,\zeta_{pq}\,\zeta_{rs}+y_p z_p(\eta_{pq}\,\zeta_{rs}+\eta_{rs}\zeta_{pq})+x_p z_p(\zeta_{pq}\,\xi_{rs}+\zeta_{rs}\xi_{pq})+x_p y_p(\xi_{pq}\,\eta_{rs}+\xi_{rs}\eta_{pq})=$$
$$=(x_p\,\xi_{pq}+y_h\eta_{pq}+z_h\zeta_{pq})\,(x_h\,\xi_{rs}+y_h\,\eta_{rs}+z_h\,\zeta_{rs})=(h\,p\,q)\,(h\,r\,s)\quad \ldots\ldots \quad (3)$$

2. A (2) alatti determináns értékét ezen értekezés (5) alatti egyenletéből nyerjük, ha abban az utolsó három oszlopot czélunknak megfelelőleg transzponáljuk és az

$$\begin{array}{l} x_1,\ y_1,\ z_1, \\ x_2,\ y_2,\ z_2, \\ x_3,\ y_3,\ z_3, \\ x_4,\ y_4,\ z_4, \end{array}$$

mennyiségeket a következőkkel pótoljuk:

$$\begin{array}{l} \xi_{ik},\ \eta_{ik},\ \zeta_{ik}, \\ \xi_{kl},\ \eta_{kl},\ \zeta_{kl}, \\ \xi_{lm},\ \eta_{lm},\ \zeta_{lm}, \\ \xi_{mi},\ \eta_{mi},\ \zeta_{mi}, \end{array}$$

A (2) alatti determinánsnak az értéke a következő:

$$(kl,\, lm,\, mi)\ (lm,\, mi,\, ik)\ (mi,\, ik,\, kl)\ (ik,\, kl,\, lm)$$

könnyen találjuk, hogy az itten előforduló tényezőknek az értékei a következők:

$$\begin{aligned} (kl,\, lm,\, mi) &= (klm)\ (lmi). \\ (lm,\, mi,\, ik) &= (lmi)\ (mik) \\ (mi,\, ik,\, kl) &= (mik)\ (ikl) \\ (ik,\, kl,\, lm) &= (ikl)\ (klm) \end{aligned}$$

és igy a következő azonos egyenletünk van:

$$\begin{vmatrix} kl, lm \\ lm, mi \\ mi, ik \\ ik, kl \\ ik, lm \\ kl, mi \end{vmatrix} = (klm)^2\,(lmi)^2\,(mik)^2\,(ikl)^2 \quad . \; . \; . \; (4)$$

Ezen egyenlet segitségével könnyű az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számsorból képezett bármely négyenkénti szám-kombinácziónak megfelelő (21) alatti determináns értékét meghatározni.

3. Az i. h. különösen kiemeltetett, hogy az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontokból meghatározott negyvenöt egyszerű négyszög közül három mindig ugyanazon Pappus-Desargues-Chasles-féle egyen-

letre vezet, a negyvenöt négyszög pedig tizenöt hármanként csoportban összeállittatott (7. l.) *)

A negyvenöt négyszög közül mindegyiknek egy a (2) alatti determinánshoz hasonló determináns felel meg, úgy hogy az 1, ... 6 pontokból lehetséges negyvenöt egyszerű négyszög egyszersmind negyvenöt (2) alatti determinánsra vezet, igy p. az id. h. a IX. alatt összeállitott

$$\left.\begin{matrix}1234\\1536\\2546\end{matrix}\right\}$$

négyszögök a következő determinánsokra vezetnek:

$$\begin{vmatrix}23\,,\ 34\\34\,,\ 41\\41\,,\ 12\\12\,,\ 23\\12\,,\ 34\\23\,,\ 41\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}53\,,\ 36\\36\,,\ 61\\61\,,\ 15\\15\,,\ 53\\15\,,\ 36\\53\,,\ 61\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}54\,,\ 46\\46\,,\ 62\\62\,,\ 54\\25\,,\ 54\\25\,,\ 46\\54\,,\ 62\end{vmatrix}\ .\ .\ .\ .\ .\ (5)$$

Könnyü volna a többi tizennégy négyszögcsoportnak megfelelő determinánsait felirni, mit különben feleslegesnek tartunk.

4. Az i. helyen előforduló (1)—(15) alatti Pappus-Desargues-Chasles-féle egyenletek levezetését az itt előforduló (1) alatti egyenletből még a következő feladatban is formulázhatjuk: Miféle tényezőkkel sokszorozandó az (1) alatti egyenlet első tagja, hogy abból az i. h. (1)—(15) alatti egyenletek első tagjait nyerjük.

Sokszorozzuk az (1) alatti egyenlet első tagját az (5) alatti determinánsok elsejével, akkor a sokszorozás eredménye, ha a (3) alatti egyenletre tekintettel vagyunk, ez lesz:

---

*) Felhasználjuk ezen alkalmat az I. V. és VIII. alatti négyszögcsoportokban előfordúló sajtóhibák kijavitására: I-ben az első négyszög 1356, V-ben a második négyszög 2641. vagy megforditva irva 1462, végre VIII-ban a harmadik négyszög 2364.

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1z_1 & x_1z_1 & x_1y_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2z_2 & x_2z_2 & x_2y_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & y_3z_3 & x_3z_3 & x_3y_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & y_4z_4 & x_4z_4 & x_4y_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & y_5z_5 & x_5z_5 & x_5y_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & y_6z_6 & x_6z_6 & x_6y_6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 23, 34 \\ 34, 41 \\ 41, 12 \\ 12, 23 \\ 12, 34 \\ 23, 41 \end{vmatrix} =$$

$$= \left|\begin{array}{cccc|cc} (123)(134) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (234)(412) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (341)(123) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (412)(234) & 0 & 0 \\ \hline . & . & . & . & \multicolumn{2}{c}{(125)(345) - (235)(145)} \\ . & . & . & . & \multicolumn{2}{c}{(126)(346) - (236)(146)} \end{array}\right|$$

$$= (234)^2 (341)^2 (412)^2 (123)^2 \begin{vmatrix} (125)(345) - (235)(145) \\ (126)(346) - (236)(146) \end{vmatrix}$$

$$= (234)^2 (341)^2 (412)^2 (123)^2 \{(126)(145)(235)(346) - (125)(146)(236)(345)\}$$

vagy még tekintetbe véve, hogy az itt felhasznált tényezők értéke a (4) alatti egyenletnél fogva:

$$= (234)^2 (341)^2 (412)^2 (123)^2$$

és azután az egyenlő tényezőket elhagyva találjuk, hogy:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1z_1 & x_1z_1 & x_1y_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2z_2 & x_2z_2 & x_2y_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & y_3z_3 & y_3z_3 & x_3y_3 \\ x_4^2 & y_3^2 & z_4^2 & y_4z_4 & x_4z_4 & x_4y_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & y_5z_5 & x_5z_5 & x_5y_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & y_6z_5 & x_6z_6 & x_6y_6 \end{vmatrix} = (126)(145)(235)(346) - (125)(146)(236)(345) \quad \ldots \; (6)$$

Miután ezen egyenlet első tagjának az eltünése egyszersmind a második eltünését maga után vonja, azért tetszik ki az itteniekből, hogy miképen következik az (1) alatti egyenletből az i. ért. (9) alatti egyenlet.

Az (5) alatti első tényező vezetett a (6) alatti egyenletre, de ugyanezen egyenletre még az (5) alatti második és harmadik tényezők is vezetnek.

Amint már emlitettük, az i. h. I—XV alatti négyszögcsoportoknak szintén tizenöt hármankénti, a (2) alatti determinánshoz hasonló, determinánscsoport felel meg.

Ha az (1) alatti egyenlet első tagját a tizenöt determinánscsoport bármely determinánsával sokszorozzuk, az (1) alatti egyenlet első tagja tizenötféle alakot nyer, melyek az i. h. (1)—(15) egyenleteinek első tagjai.

Budapesten 1881. szeptember 29-én.

Negyedik kötet.

I. Schulhof Lipót. Az 1870. IV. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása 10 kr.
II. Schulhof Lipót. Az 1871. II. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása. 10 kr.
III. Szily Kálmán. A hő elmélet második főtétele, levezetve az elsőből 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. Csillagászati megfigyeléseim 1874 és 1875-ben. 50 kr.
V. Konkoly Miklós. Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagdában 40 kr
VI. Hunyadi Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól . . . . 20 kr.
VII. Réthy Mór. A három méretü homogén tér (u. n. nem euklidikus) siktan trigonometriája . . . . 20 kr.
VIII. Réthy Mór. A propeller és peripeller felületek elméletéhez. . 30 kr.
IX. Fest Vilmos. Temesi Reitter Ferencz emléke . . . . . . 10 kr.

Ötödik kötet.

I. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Nagy Károly r. tag felett . . 10 kr.
II. Kenessey Albert. Adatok folyóink vizrajzi ismeretéhez . . 20 kr.
III. Dr. Hoitsy Pál. Csillag-észlelés a kelet-nyugot vonalban (egy számtáblával.) . . . . 30 kr.
IV. Hunyady Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól. (Folytatás a IV. kötetben ugyane czim alatt megjelent értekezésnek.) . . . . 10 kr.
V. Hunyady Jenő. Apollonius feladata a gömbfelületen . . . 10 kr.
VI. Dr. Gruber Lajos. 24 η Cassiopeiae kettős csillag mozgásáról . 10 kr.
VII. Martin Lajos. A változtatási hánylat alkalmazása a propeller-fölület egyenletének lefejtésére. . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. A teljes holdfogyatkozás 1877. február 27-én és az 1877. (Borelli) I. számu üstökös szinképének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
IX. Konkoly Miklós. A napfoltok s a nap felületének kinézése 1876-ban (három képtáblával.) . . . . 40 kr.
X. Konkoly Miklós. 160 álló csillag szinképe. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1876-ban . . . . 20 kr.

Hatodik kötet.

I. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. I. rész. 1871—1873. Ára . . . . 20 kr.
II. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára . . . . 20 kr.
III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámitása. Közlik dr. Gruber Lajos és Kurländer Ignácz kir. observatorok. 10 kr.
IV. Schenzl Guido. Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. . . . . 20 kr.
V. Gruber Lajos. A november-havi hullócsillagokról . . . . 20 kr.
VI. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára . . . . 20 kr.
VII. Konkoly Miklós. A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára . . . . 20 kr.

VIII. Konkoly Miklós. Mercur átvonulása a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án . . . . 10 kr.

Hetedik kötet.

I. Konkoly Miklós. Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositió után. Egy táblával. . . . . 10 kr.

II. Konkoly Miklós. Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr.

III. Konkoly Miklós. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban. IV. rész. Ára . . . . 10 kr.

IV. Konkoly Miklós. A nap felületének megfigyelése 1878-ban az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.

VI. Hunyady Jenő. A Möbius-féle kritériumokról a kúpszeletek elméletében . . . . 10 kr.

VII. Konkoly Miklós. Spectroscopicus megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón . . . . 10 kr.

VIII. Dr. Weinek László. Az instrumentális fényhajlás szerepe egy Vénus-átvonulás photographiai felvételénél . . . . . . 20 kr.

IX. Suppan Vilmos. Kúp- és hengerfelületek önálló ferde vetitésben. (Két táblával.) . . . . 10 kr.

X. Dr. Konek Sándor. Emlékbeszéd Weninger Vincze l. t. fölött. 10 kr.

XI. Konkoly Miklós. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1879-ben. . . . . 10 kr.

XII. Konkoly Miklós. Hullócsillagok radiatio pontjai, levezetve a magyar korona területén tett megfigyelésekből 1871—1878 végéig 20 kr.

XIII. Konkoly Miklós. Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagvizsgálón 1879-ben. (Egy tábla rajzzal.) . . . . 20 kr.

XIV. Konkoly Miklós. Adatok Jupiter és Mars physikájához. 1879. (Három tábla rajzzal.) . . . . 30 kr.

XV. Réthy Mór. A fény törése és visszaverése homogén isotrop átlátszó testek határán. Neumann módszerének általánositásával és bövitésével (Székf. ért.) . . . . 10 kr

XVI. Réthy Mór. A sarkitott fényrezgés elhajlító rács által való forgatásának magyarázata, különös tekintettel Fröhlich észleteire. . . 10 kr.

XVII. Szily Kálmán. A telitett gőz nyomásának törvényéről. . 10 kr.

XVIII. Hunyady Jenő. Másodfoku görbék és felületek meghatározásáról. . . 20 kr.

XIX. Hunyady Jenő. Tételek azon determinánsokról, melyek elemei adjungált rendszerek elemeiből vannak componálva. . . . 20 kr.

XX. Dr. Fröhlich Izor. Az állandó elektromos áramlások elméletéhez. . . 10 kr.

XXI. Hunyady Jenő. Tételek a componált determinánsoknak egy különös neméről. . . . . 10 kr.

XXII. Kőnig Gyula. A raczionális függvények általános elméletéhez. 10 kr.

XXIII. Silberstein Salamon. Vonalgeometriai tanulmányok . 20 kr.

XXIV. Hunyady János. A Steiner-féle kritériumról a kúpszeletek elméletében. 10 kr.

XXV. Hunyady Jenő. A pontokból vagy érintőkből és a conjugált háromszögből meghatározott kúpszelet nemének eldöntésére szolgáló kritériumok. 10 kr.

Budapest, 1881. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.